

Equilíbrio estático interno

O equilíbrio externo de uma estrutura é condição necessária, mas não suficiente para sua existência. Mesmo uma estrutura com grande grau de estabilidade, como as estruturas hiperestáticas, pode perder a sua estabilidade, se o material da qual é composta não for capaz de reagir às tensões internas, rompendo-se e perdendo o equilíbrio interno. Semelhante ao caso do equilíbrio externo, para que ocorra o equilíbrio interno é necessário que as seções que compõem o elemento estrutural não se desloquem na horizontal, na vertical e não girem. A ruptura de um elemento estrutural dá-se pela perda do equilíbrio interno, ou seja, as tensões no material provocam algum deslocamento relativo entre as seções.

Como não se pode ver o que acontece dentro da seção de um elemento estrutural, recorre-se a alguma pista externa. Essa pista é a forma como o elemento estrutural se deforma quando submetido às forças externas. Existe uma relação direta entre o que ocorre dentro do elemento estrutural e as deformações externas visíveis.

TE 11

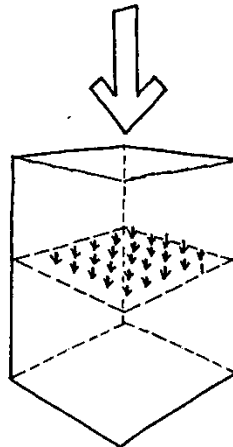
Tensão

Ninguém duvida que o aço é um material mais resistente que, por exemplo, o algodão. Mas isso não garante que um fio de aço resista mais que um fio de algodão. Desde que colocada uma quantidade suficiente de algodão, o seu fio poderá resistir mais. A resistência de um elemento estrutural depende da relação entre a força aplicada e a quantidade de material sobre a qual a força age. A essa

relação dá-se o nome de tensão. Em outras palavras, a tensão é a quantidade de força que atua em uma unidade de área do material. Só podemos comparar a resistência de dois materiais comparando as máximas tensões que eles podem resistir, ou em outras palavras, o quanto de força por unidade de área eles suportam.

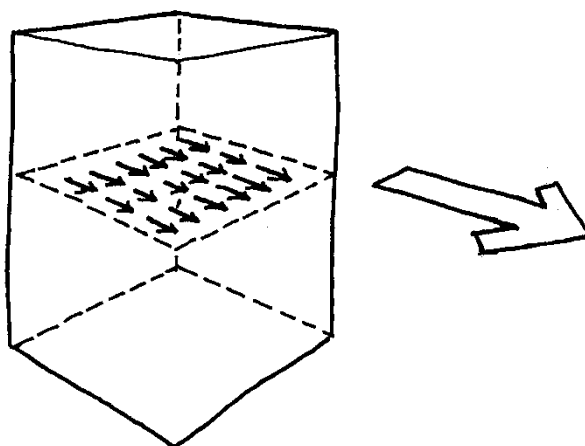
Quando a força é aplicada perpendicularmente à superfície resistente, a tensão denomina-se **tensão normal**. Ver figura 13.

FIG. 13



Quando a força aplicada for paralela, ou melhor, tangente à superfície resistente, a tensão denomina-se **tensão tangencial** ou **tensão de cisalhamento**. Ver figura 14.

FIG. 14



É importante distinguir-se que tipo de tensão está ocorrendo num elemento estrutural, pois os materiais apresentam capacidades diferentes conforme sejam solicitados a um ou outro tipo. Em seguida são dados alguns exemplos de materiais e suas respectivas tensões máximas de trabalho.

| | |
|---------------|--------------------------------------------------------|
| Aço tipo A-36 | $\sigma = 1.500 \text{ kgf/cm}^2$ (tensão normal) |
| | $\tau = 800 \text{ kgf/cm}^2$ (tensão de cisalhamento) |
| Peroba | $\sigma = 90 \text{ kgf/cm}^2$ (tensão normal) |
| | $\tau = 12 \text{ kgf/cm}^2$ (tensão de cisalhamento) |
| Concreto | $\sigma = 100 \text{ kgf/cm}^2$ (tensão normal) |
| | $\tau = 6 \text{ kgf/cm}^2$ (tensão de cisalhamento) |

As estruturas quando submetidas a tensões devem trabalhar com uma certa folga, para que imprevistos, tais como falhas de material, impossibilidade de execução ideal e outros efeitos não previstos, não ponham em risco a resistência da estrutura. Nenhuma estrutura trabalha dentro dos seus limites de resistência,



mas em um regime um pouco abaixo desse limite. A esse regime de trabalho dá-se o nome de regime de segurança e as tensões atuantes são denominadas **tensões admissíveis**. A determinação das tensões admissíveis é feita pela aplicação de um **coeficiente de segurança** às tensões limites do material. Os coeficientes de segurança variam de material para material e são obtidos estatisticamente dependendo da maior ou menor confiabilidade no material: no aço esse coeficiente é da ordem de 1,4, no concreto armado de 2 e em algumas madeiras chega a 9.

Todo material quando submetido a tensão apresenta uma deslocabilidade nas suas moléculas, o que é denominado **deformação**. Quanto mais solicitado o material, mais ele se deforma. Como as tensões são invisíveis ao olho humano, uma maneira de se saber se um elemento estrutural está mais ou menos solicitado é pela verificação do quanto ele se deformou. Alguns materiais são mais deformáveis que outros apresentando deformações elevadas mesmo quando solicitados por pequenas forças. A deformabilidade visível dos materiais estruturais é uma característica bastante desejável, já que grandes deformações podem avisar sobre problemas na estrutura.

TE 12

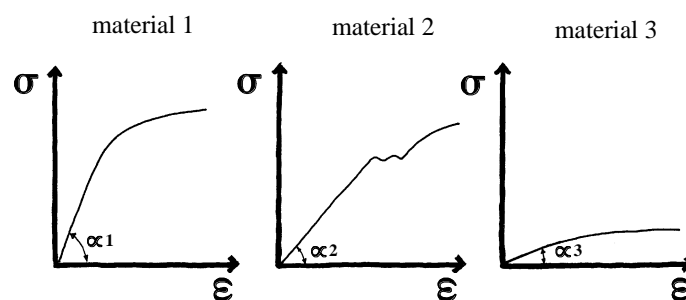
Entre a situação de descarregamento total e a ruptura, os materiais passam por algumas fases importantes. Enquanto as deformações forem proporcionais às forças aplicadas, ou seja, ao se duplicar a força o material tem sua deformação duplicada; ao se triplicar a força, sua deformação triplica e assim por diante, o material é considerado trabalhando no **regime elástico**. Nesta fase quando se deixa de aplicar a força o material volta a ter a sua dimensão original. O elástico de borracha é um elemento que representa bem essa situação.

Se a força aplicada atingir valores acima de um determinado limite, pode-se notar que o material muda de comportamento não mais apresentando deformações proporcionais ao aumento da força. A esta fase dá-se o nome de

regime plástico. Nesta situação o material quando descarregado passa a apresentar uma deformação permanente. Ao final do regime plástico, com o aumento de carga, temos a ruptura do material. Alguns materiais apresentam na passagem do regime elástico para o plástico, um grande aumento na deformação sem aumento na intensidade da força. Esta situação caracteriza o fenômeno denominado **escoamento** do material.

A relação entre a força aplicada e a deformação pode ser colocada em gráfico. Para que o gráfico represente o comportamento do material independentemente das dimensões do elemento que serviu de base para o ensaio, são colocadas no gráfico, em vez das forças aplicadas, suas respectivas tensões e em vez da deformação total da barra, cujo valor varia com o comprimento inicial é usada a deformação específica que é a relação entre a deformação real e o comprimento inicial da barra. Dessa forma obtém-se gráficos semelhantes àqueles mostrados na figura 15, denominados gráficos **tensão x deformação**.

Fig 15



onde $\sigma = \frac{F}{A}$; $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$; $E = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon}$

onde σ = tensão;
 ϵ = deformação específica;
 E = módulo de elasticidade



TE 13

Módulo de elasticidade

Observando os gráficos da fig. 15, nota-se que na parte onde o gráfico é uma reta, que corresponde à região do regime elástico do material, ou seja, proporcionalidade entre tensão e deformação, sua inclinação varia de material para material. Essa variação nos mostra que para uma mesma tensão existem materiais que se deformam mais que outros. Quanto maior for o ângulo α , ou seja, quanto mais inclinada for a reta menos deformável é o material. Conclui-se que a inclinação dessa reta nos informa quanto deformável é o material. A essa inclinação dá-se o nome de **módulo de Young** ou **módulo de elasticidade**, que é uma constante para cada tipo de material.

O módulo de elasticidade do aço é 2.100.000 kgf/cm², o do concreto é da ordem de 210.000 kgf/cm². Esses valores mostram que o concreto é um material 10 vezes mais deformável que o aço, o que a princípio contraria a intuição, que tende a indicar o contrário. Isso se deve a maneira como os dois materiais são aplicados nas estruturas. As peças em aço, devido sua resistência maior, são mais esbeltas e as de concreto, ao contrário, mais volumosas. Assim sendo, devido às suas dimensões, as peças metálicas tendem a ser mais deformáveis.

Além do conceito de módulo de elasticidade, os gráficos de tensão x deformação apresentam uma relação bastante importante que descreve a maneira como o material se relaciona com as tensões a ele aplicadas e as suas respectivas deformações. Essa relação é particularmente importante no regime elástico, pois permite a solução de diversos problemas de dimensionamento de elementos estruturais. Essa relação recebe o nome de **Lei de Hooke**, e pode ser expressa matematicamente pela seguinte equação:

$$\sigma = E \times \varepsilon$$

onde σ : Tensão aplicada ao material

E : Módulo de elasticidade do material

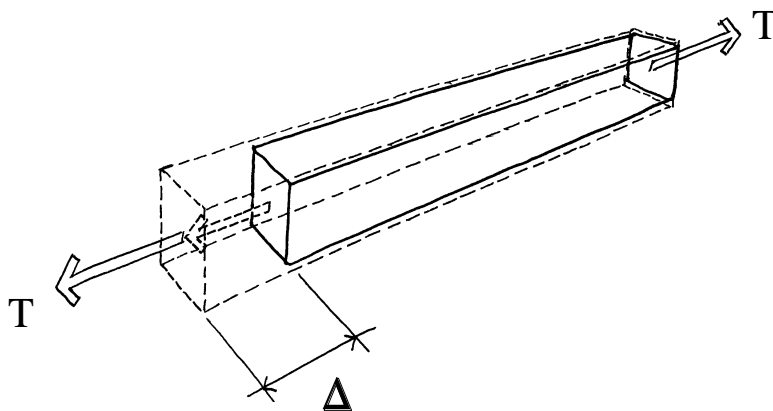
ε : Deformação específica (deformação efetiva dividida pelo comprimento inicial da barra).

TE 14

Tração simples ou axial

Se uma barra, quando submetida a forças externas, sofre um aumento no seu tamanho na direção do seu eixo, e se esse aumento ocorre de forma uniforme, ou seja, todas as suas fibras sofrem a mesma deformação, pode-se concluir que internamente a barra está sujeita a uma força atuando de dentro para fora, normal ao plano da sua seção e aplicada no seu centro de gravidade. A esta força dá-se o nome de **tração simples ou axial**. Ver figura 16.

FIG. 16



A força de tração simples se distribui na secção da barra provocando **tensões normais de tração simples**. Essas tensões são uniformes ao longo de toda a secção, já que a tração simples provoca uma solicitação uniforme de todas as fibras da secção.

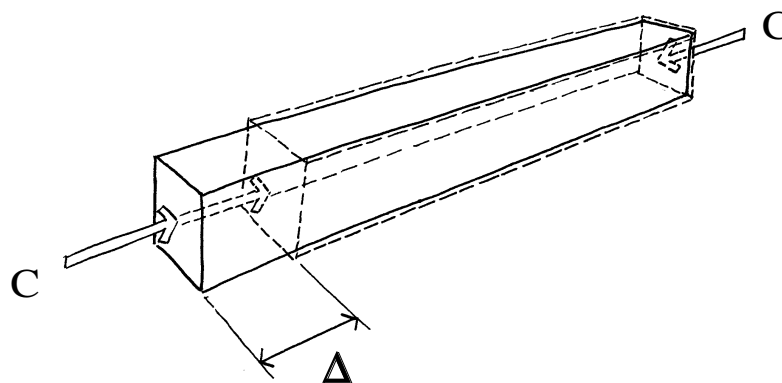
Neste caso o equilíbrio interno é obtido quando o material é suficientemente resistente para reagir às tensões que, provocadas pelas forças de tração simples, tendem a afastar as secções.

TE 15

Compressão simples ou axial e flambagem

Se a barra, quando submetida a forças externas, sofre uma diminuição no seu tamanho na direção do seu eixo, e se essa diminuição ocorre de forma uniforme, ou seja, todas as suas fibras sofrem a mesma deformação, pode-se concluir que internamente a barra está sujeita a uma força atuando de fora para dentro, normal ao plano da sua secção e aplicada no centro de gravidade dessa secção. A esta força dá-se o nome de compressão simples ou axial. (Ver figura 17)

FIG. 17



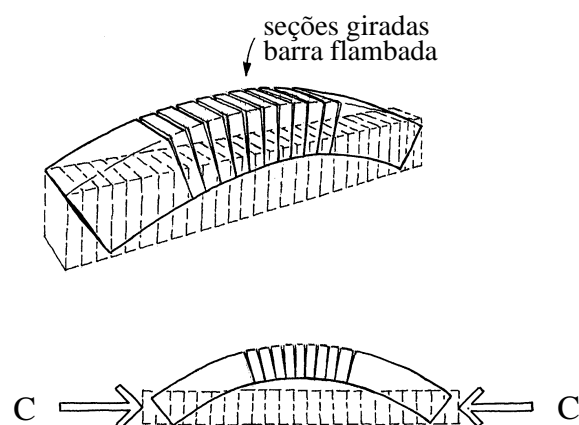
Além do sentido em que se deformam, há um comportamento bastante diferenciado entre uma barra sujeita à tração simples e outra sujeita à compressão simples. Se em uma barra tracionada a força de tração simples é aumentada gradativamente, as tensões internas aumentam até que, ultrapassada a tensão de resistência à tração do material, a peça se rompe. No caso da compressão axial pode ocorrer a perda de estabilidade da peça, bem antes que seja atingida a tensão de ruptura a compressão do material, como mostra a figura 18. A este fenômeno de perda de estabilidade da barra antes da ruptura do material, dá-se o nome de **flambagem**.

TE 16

A flambagem

A flambagem é o fenômeno que distingue radicalmente o comportamento entre barras submetidas à tração e barras submetidas à compressão simples, exigindo uma preocupação especial com as barras comprimidas.

FIG 18

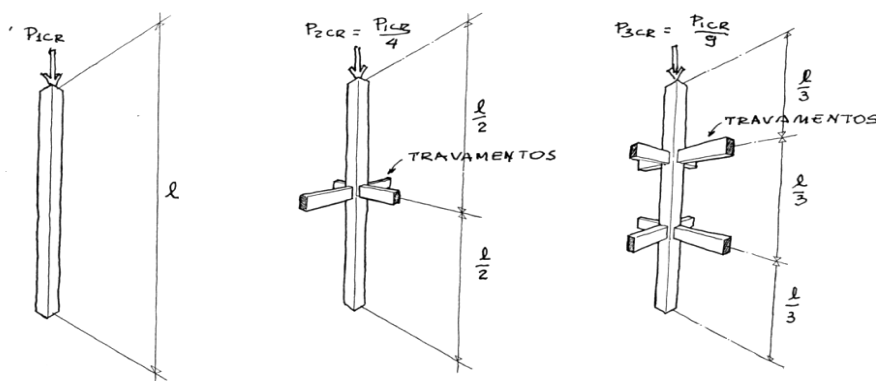


A flambagem depende de diversos fatores, e o controle deles é que garante um σ adequado das barras submetidas à compressão. É imediata a conclusão de que a intensidade da força aplicada é um desses fatores. Quanto maior sua intensidade maior será o perigo de flambagem da barra. O tipo de material é outro fator. Como foi visto anteriormente existem materiais mais deformáveis que outros, e que a deformabilidade do material é medida pelo seu módulo de elasticidade, obtido no ensaio tensão x deformação. Materiais com módulos de elasticidade altos serão menos deformáveis e, portanto, sofrerão menos riscos de flambagem.

Outros fatores, menos evidentes, podem ser observados a partir de ensaios bastante simples. Ao se comprimir barras, com as mesmas seções e de comprimentos diferentes, notar-se-á que elas flambarão com forças diferentes: quanto maior o comprimento da barra menor será a força que provoca flambagem.

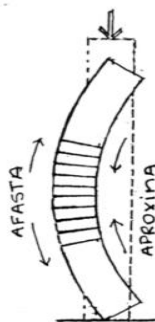
Verifica-se, também, que a flambagem da barra depende do quadrado do seu comprimento. Em outras palavras, quando se duplica o comprimento de uma barra, a força necessária para provocar sua flambagem ficará reduzida a apenas um quarto. A barra ficará quatro vezes mais instável. Por isso, são de fundamental importância as condições de travamento lateral das barras submetidas à compressão. Ver figura 19.

FIG. 19



A forma e dimensões da seção da barra são fatores de grande importância no fenômeno da flambagem. Ao se usar um modelo bem simples como o apresentado na figura 20, vê-se que ao flambar, as seções da barra, que antes eram paralelas, giram em torno dos seus eixos aproximando-se numa das faces e afastando-se em outra.

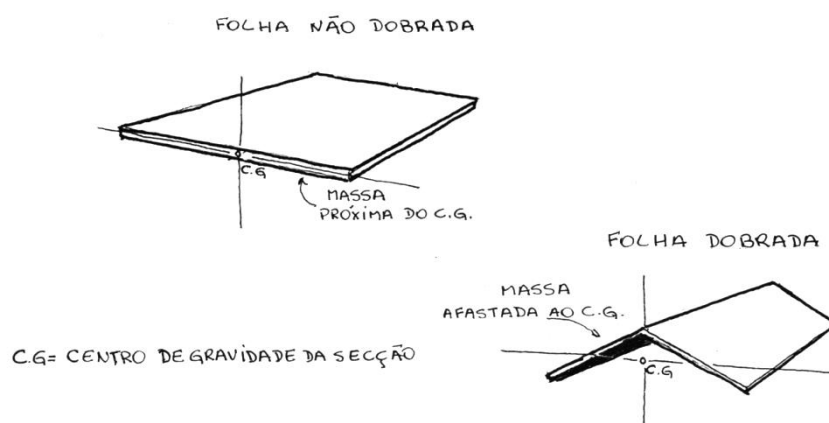
FIG. 20



Essa situação mostra que a maior ou menor possibilidade de uma barra flambar está diretamente ligada a maior ou menor facilidade de giro das suas seções. Uma folha de papel dobrada, se comparada a uma folha não dobrada, como mostra a figura 21, apresenta uma resistência bastante superior ao giro em relação ao eixo horizontal, que passa pelo centro de gravidade de sua seção transversal. Convém lembrar que o centro de gravidade de uma figura plana é o ponto em que, se a figura tivesse peso, poder-se-ia suspendê-la, de forma que ela não sofreria qualquer giro mantendo-se horizontal. É intuitivo que para que isso ocorra é necessário que as massas que compõem a figura estejam adequadamente distribuídas em todas as direções em relação ao centro de

gravidade, daí ser possível que o centro de gravidade de uma figura plana ocorra fora dessa figura.

FIG. 21

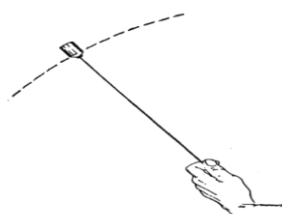


A

folha dobrada apresenta maior resistência a flambagem que a folha não dobrada. Qual é, portanto, o fator que faz com que uma secção se torne mais ou menos resistente ao giro? A maior ou menor possibilidade de uma secção girar depende da maneira como o material está distribuído em relação ao centro de gravidade da secção. Para entender melhor esse fenômeno observe a seguinte analogia física:

suponha que se queira girar, com a mão, uma massa qualquer amarrada a ela por um fio, como mostra a figura 22.

FIG. 22





Quanto mais afastada essa massa estiver da mão mais difícil será impulsioná-la ao giro. Ou seja, quanto mais longe estiver a massa do centro de giro mais difícil é tirá-la da inércia. A esse fenômeno dá-se o nome de **momento de inércia**. Coisa semelhante ocorre com a distribuição de material na secção de uma barra. Quanto mais afastado estiver o material do centro de giro da secção da barra, ou seja, do seu centro de gravidade, mais difícil será girar a secção e, conseqüentemente, mais difícil será a barra flambar. No exemplo da figura 21, quando a folha de papel está dobrada sua secção transversal tem a forma de um V, cujo centro de gravidade encontra-se na posição mostrada na figura. Quando a folha não está dobrada a sua secção tem a forma de um retângulo cuja altura é muito pequena (a espessura da folha). Nesta situação o centro de gravidade encontra-se na metade dessa altura.

Pode-se ver que as distribuições de material em relação ao centro de gravidade das secções são muito diferentes para a folha dobrada e a não dobrada. Naquela o material está mais longe do centro de gravidade, ou centro de giro, o que resulta numa maior resistência ao giro da secção e, portanto numa maior resistência à flambagem.

A forma como o material é distribuído na secção pode ser medido matematicamente e recebe o nome de **momento de inércia da secção**. O momento de inércia da secção relaciona as diversas porções de áreas que compõem a secção com suas distâncias ao centro de gravidade da secção.

Pode-se concluir que para barras submetidas à compressão, portanto sujeitas a flambagem, a forma da secção, ou seja, a maneira como o material esteja distribuído em relação ao centro de gravidade da secção, é de extrema importância.

Resumindo, a rigidez de uma barra à flambagem depende da relação entre o momento de inércia da sua secção, do comprimento da barra e da elasticidade do material que a compõe. A relação matemática apresentada a seguir, de autoria de **Euler**, sintetiza bem essas relações:



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2}$$

Onde P_{cr} : Carga crítica de flambagem (aquela que provoca a flambagem).

E : Módulo de elasticidade do material.

J : Momento de inércia da secção da peça.

L : Comprimento não travado da peça.

TE 17

A força de compressão simples se distribui na seção da barra provocando **tensões normais de compressão simples**. Essas tensões são uniformes ao longo de toda a seção, já que a compressão simples provoca uma solicitação uniforme em todas as fibras da seção.

No caso da compressão simples o equilíbrio interno é obtido quando a barra é suficientemente rígida, a ponto de não girar sob o efeito de flambagem, ou quando o material é suficientemente resistente para reagir às tensões que tendem a aproximar as seções, provocadas pelas forças de compressão simples.

TE 18

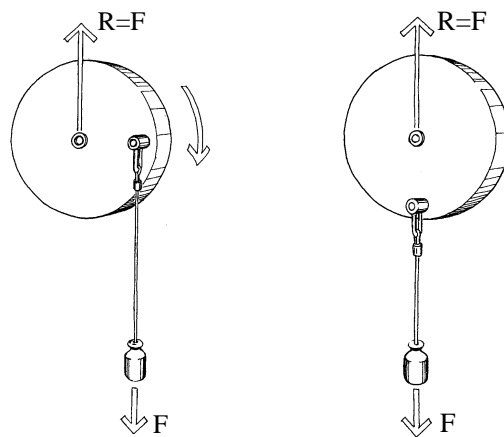
Momento - momento fletor

A figura 23 mostra um disco fixado no seu centro tendo na extremidade de um dos seus raios uma carga pendurada por um cabo. Se esse disco for colocado em uma posição em que o cabo que sustenta a carga não esteja alinhado com o seu centro, ele girará até que ocorra o equilíbrio, quando a carga, o cabo e o centro do disco ficam alinhados. A análise das forças que atuam no disco mostra

a existência de duas forças, uma de ação representada pelo peso e outra de reação a esse peso aplicada no centro do disco, onde ele está fixado. Enquanto

as linhas de ações dessas forças mantêm-se não alinhadas, o disco gira. Quando elas se alinham, o disco para. A figura 23 mostra como as forças encontram-se aplicadas no disco.

FIG. 23

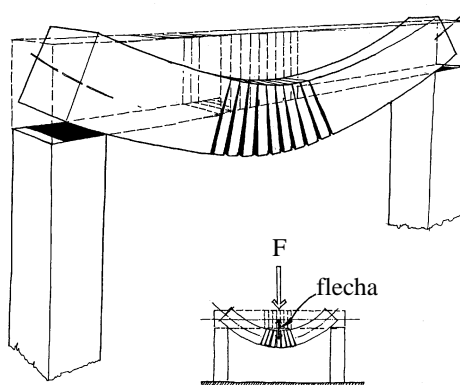


Conclui-se dessa experiência que o giro ocorre enquanto estiver aplicado no disco um par de forças, de mesma direção (paralelas e verticais), sentidos contrários (uma para cima e outra para baixo) e enquanto não estiverem colineares. A um par de forças nesta situação dá-se o nome de **binário**. Sempre que ocorrer um binário ocorrerá um giro. A esse giro dá-se o nome de **momento**.

TE 19

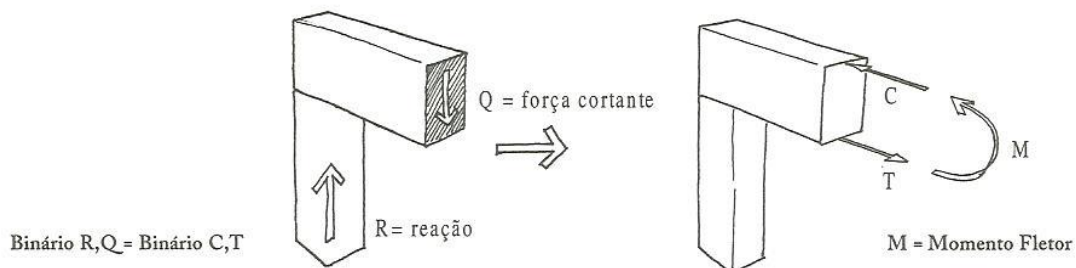
A figura 24 mostra uma barra sobre dois suportes, no meio da qual é aplicada uma força perpendicular ao seu eixo.

FIG 24



Assim solicitada a barra deforma-se e seu eixo, que antes era reto, passa a ter a forma curva. O modelo mostra que ao sofrer essa deformação todas as seções da barra, que inicialmente eram paralelas, giram em relação aos eixos horizontais que passam pelos seus centros de gravidade. É fácil observar que ao girarem as seções se aproximam na porção localizada acima do eixo que passa pelo centro de gravidade da seção e se afastam na porção abaixo desse eixo. O modelo mostra também que a intensidade desse giro varia ao longo do comprimento da barra. As seções próximas ao centro giram mais que aquelas próximas aos apoios. Para as seções girarem é necessária a ocorrência de um par de forças (binário ou momento). Esse binário é facilmente visualizado no modelo da figura 25, basta que se considerem as reações de apoio e as forças verticais em cada seção, que são chamadas de **forças cortantes**. Esse binário externo ativo, devido à reação R e a força cortante Q , provoca um binário interno reativo, que resulta nas forças de compressão C e de tração T . Este último binário faz com que as seções se aproximem na parte acima do eixo do centro de gravidade e se afastem na parte de baixo.

FIG 25



As deformações que ocorrem ao longo do eixo da barra tornando-o curvo são denominadas flechas. Portanto o momento que ocorre na barra submetida a carregamentos aplicados perpendicularmente ao seu eixo, além de provocarem giros nas suas seções, também provoca flecha no seu eixo, portanto é um momento de flecha ou **momento fletor**.

TE 20

O momento fletor provoca deformações parecidas com as causadas pela flambagem, ou seja, flechas e giros das seções. Mas os agentes causadores são diferentes. Enquanto a flambagem é provocada por uma força aplicada na direção do eixo da barra (força de compressão simples), o momento fletor é provocado por forças aplicadas perpendicularmente a esse eixo. Os dois fenômenos apresentam-se visualmente idênticos, mas são conceitualmente bem diferentes.

O binário interno de tração e compressão simultâneo, provocado pelo momento fletor, se distribui na seção transversal da barra provocando simultaneamente **tensões normais de tração e de compressão**.



Semelhantemente ao fenômeno da flambagem, a resistência de uma seção ao momento fletor depende do seu momento de inércia, ou seja, da maior ou menor possibilidade de giro das seções.

TE 21

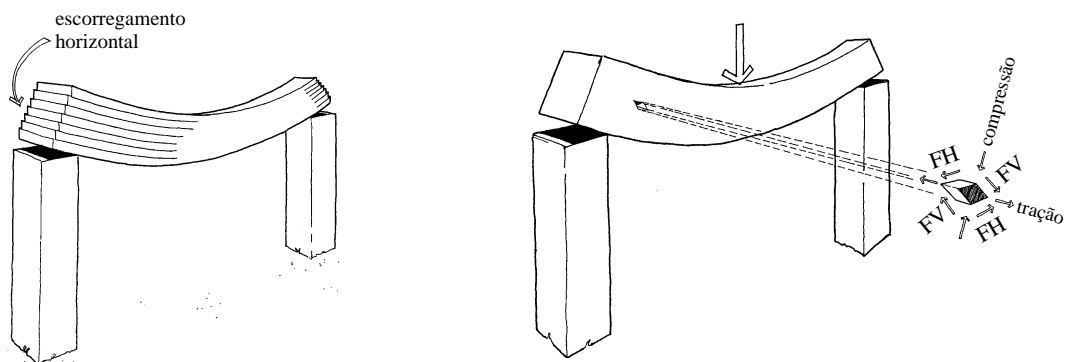
Força Cortante

Existe uma relação direta entre momento fletor e força cortante, o que se constitui no fenômeno geral de flexão. Um experimento simples mostra isso. Ao se tomar um maço de papéis e sustentá-lo com as mãos e aplicar simultaneamente giros iguais nas extremidades, veremos que não ocorrerão deslizamentos relativos entre as diversas folhas do maço. Se ao contrário, for provocado um giro em apenas uma das extremidades, as diversas folhas escorregarão indicando a ocorrência de força cortante longitudinal. Sempre que o momento fletor variar de uma seção a outra, ocorrerá a tendência de deslizamentos vertical e horizontal das seções da peça, ou seja, a ocorrência de força cortante. Como é bastante rara a ocorrência de momento fletor constante ao longo de um trecho de uma viga, pode-se dizer que sempre que houver a ocorrência de momento fletor haverá a ocorrência de força cortante.

TE 22

Sempre que ocorrer a possibilidade de escorregamento das seções verticais haverá o escorregamento das seções horizontais. São escorregamentos provocados pelas forças cortantes verticais e horizontais e que se combinam resultando em forças inclinadas de tração e compressão como mostra a figura 26.

FIG. 26



A força cortante se distribui nas seções transversais e longitudinais da barra provocando **tensões tangenciais ou de cisalhamento verticais e horizontais**. O efeito concomitante dessas duas tensões, conforme visto na figura 26, resultam em tensões normais de tração e de compressão inclinadas.

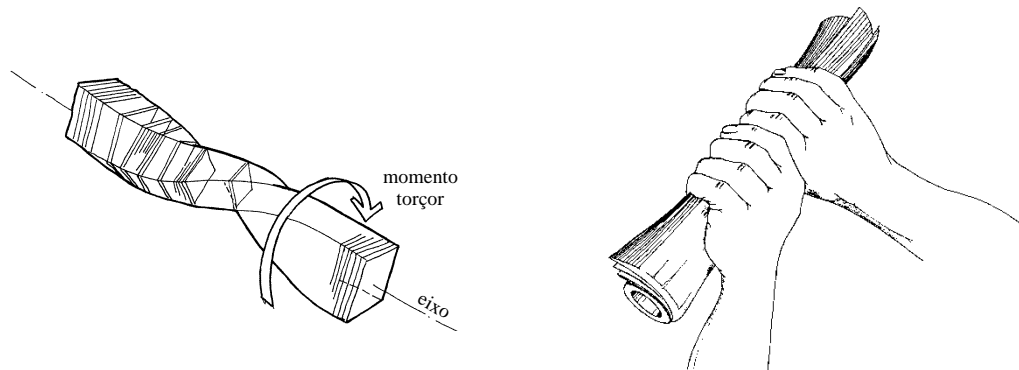
No caso da força cortante o equilíbrio interno se dá quando o material é suficientemente resistente para reagir às tensões de tração e compressão inclinadas devidas às tendências de escorregamentos horizontais e verticais das seções.

TE 23

Momento torçor

Como foi visto anteriormente, momento significa giro, portanto **momento torçor** deve, também, significar um tipo de giro. De fato, quando ocorre momento torçor numa barra ocorre giro das suas seções, mas, diferentemente do momento fletor, no caso do momento torçor as seções giram com o eixo da barra mantendo-se reto, não apresentando as flechas características da flexão. A figura 27 mostra o modelo de uma barra submetida a torção.

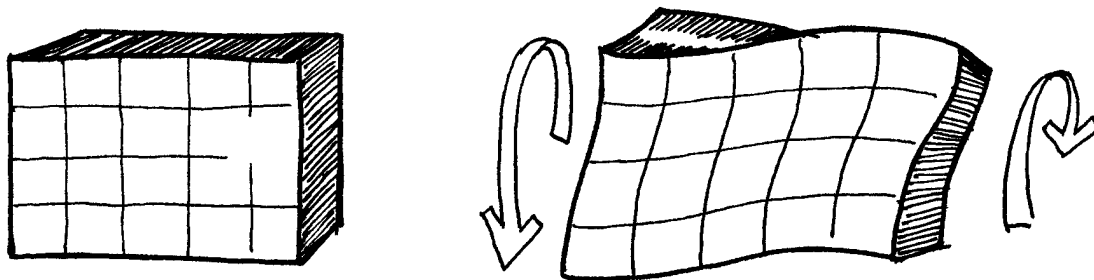
FIG. 27



Um outro ensaio, bastante simples, pode ser realizado com um canudo, feito com uma folha de papel enrolada. Ao se torcer esse canudo, notar-se-á o escorregamento longitudinal entre as folhas, como mostra a figura 27. Deste ensaio conclui-se que a torção provoca, além do giro relativo entre as seções transversais, um escorregamento longitudinal das seções horizontais. Conclui-se, ainda, que o giro transversal e o escorregamento longitudinal provocam forças cortantes transversais e longitudinais, semelhantes às aquelas discutidas anteriormente quando foi apresentada a força cortante.

Esse dois efeitos, força cortante transversal e força cortante longitudinal ocorrem simultaneamente, dando como resultado o aparecimento de forças de tração e compressão, inclinadas a 45 graus. O efeito dessas forças fica bastante evidente no modelo da figura 28, que apresenta uma barra quadriculada. As deformações que sofrem as quadriculas mostram as direções das forças resultantes da torção.

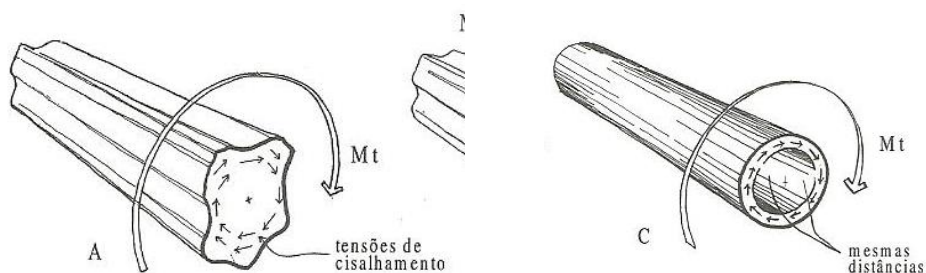
FIG. 28



As forças cortantes transversais e longitudinais devidas à torção distribuem-se nas seções das barras provocando **tensões de cisalhamento transversais e longitudinais**. O efeito simultâneo dessas tensões resulta em **tensões normais inclinadas de tração e compressão**.

O binário de forças formados pelas resultantes das tensões de cisalhamento na seção é que equilibram o momento torçor. Logo, quanto mais afastadas do centro de gravidade estiverem essas resultantes, menos solicitada será a seção, daí serem mais eficientes a torção, seções que apresentem material longe do centro de gravidade e igualmente afastado em todas as direções, ver figura 29.

FIG 29





Desse modo as seções de tubos circulares são as mais eficientes para absorver torção. Quando estas não forem possíveis, deverão ser previstas seções que se aproximem da forma circular vazada.

No caso da torção o equilíbrio interno se dá, semelhantemente ao caso da força cortante, quando o material tiver resistência suficiente para reagir às tensões de tração e compressão resultantes da tendência de escorregamento transversal e longitudinal das seções.